سری مکانیک

خلاصه درس فصل اول:

توابع دو متغیره

حد و پیوستگی در توابع دو متغیره

می‌گوییم $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y)=L$ هرگاه بتوان استلزام منطقی زیر را نشان داد:

$$\forall\beta>\circ \quad \exists\alpha>\circ \qquad ; \qquad \circ<\sqrt{(x-x_\circ)^{۲}+(y-y_\circ)^{۲}}<\alpha \quad\Rightarrow\quad |f(x,y)-L|<\beta$$

و می‌گوییم تابع $f(x,y)$ در نقطه $(x_\circ,y_\circ)$ پیوسته است هرگاه:

$$\lim_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y)=f(x_\circ,y_\circ)$$

توجه:

معمولاً علاقه‌مندیم وجود یا عدم موجود بودن یک حد دو متغیره در نقطه‌ای خاص را بدون ارجاع به برقراری استلزام منطقی فوق، بررسی کنیم. به خصوص از آنجا که (حاصل حد یک تابع دو متغیره در صورت وجود یکتا می‌باشد)، اگر بتوانیم نشان دهیم $\lim\limits_{(x,y)\to(x_\circ,y_\circ)} f(x,y)$ به ازاء لااقل دو طریق نزدیک شدن به نقطه $(x_\circ,y_\circ)$ به دو جواب متفاوت منجر می‌شود، عدم موجود بودن حد مذکور ثابت شده است.

دقت داریم برای میل کردن به نقطه $(x_\circ,y_\circ)$ بیشمار مسیر و طریق مختلف وجود دارد و البته اگر حد مورد بحث به ازاء تعدادی از این مسیرها به جواب یکسانی منجر شد، اثباتی برای وجود حد مذکور صورت نپذیرفته است.

نکته: ممکن است برای نزدیک شدن به نقطه $(x_\circ,y_\circ)$ دو مسیر خاص:

الف) روی خط $x=x_\circ$ قرار بگیریم و y را به $y_\circ$ میل دهیم

ب) روی خط $y=y_\circ$ قرار بگیریم و x را به $x_\circ$ میل دهیم

مد نظر قرار گیرد (تغییر ترتیب میل دادن متغیرها)، اگر دو جواب متفاوت برای حد مورد بحث به‌دست آمد، به معنای عدم موجود بودن آن حد خواهد شد (و نه چیز دیگر!)

نکته: بسیاری مواقع در تحلیل حدهای دو متغیره برای حالت $(x,y)\to(\circ,\circ)$ که به ابهام $\frac{\circ}{\circ}$ انجامیده‌اند، استفاده از تغییر متغیرهای $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ و رفتن به مختصات قطبی می‌تواند برای ارزیابی حد مورد بحث مناسب باشد. طبیعتاً در این حالت $r\to\circ$ و البته θ مقداری دلخواه می‌تواند باشد. بدیهی است اگر جواب به θ وابسته نشد و به جواب مشخصی رسید حاصل حد مورد نظر را یافته‌ایم و اگر جواب وابسته به θ بود، عدم موجود بودن آن حد ثابت می‌شود. اگر به ازاء θای حاصل کار به ابهام رسید، حد وجود ندارد.

مشتقات جزئی توابع دو متغیره

برای تابع $Z=f\left(x,y\right)$ اگر چه معانی عباراتی نظیر $\frac{\partial z}{\partial x}$ یا $\frac{\partial z}{\partial y}$ یا ... مشخص است، اما در بیان ریاضی داریم:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x,y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x,y+\Delta y\right)-f\left(x,y\right)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_y\left(x+\Delta x,y\right)-f_y\left(x,y\right)}{\Delta x}$$

قضیه مشتق‌های آمیخته: هرگاه تابع $z=f\left(x,y\right)$ و مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم z توابعی پیوسته باشند داریم:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$$

مسأله حذف تابع اختیاری

فرض کنید داشته باشیم

$$F\left(u\left(x,y,z\right)\ \text{و}\ v\left(x,y,z\right)\right)=0\ \ \text{یا}\ \ u\left(x,y,z\right)=F\left(v\left(x,y,z\right)\right)$$

که در آن v و u توابعی مشخص شده و z تابعی از دو متغیر مستقل x,y می‌باشد.

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی حاکم بر z (حاصل از حذف تابع اختیاری F)

به‌صورت زیر قابل حصول است.

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0$$

تعریف ژاکوپین

اگر تبدیلی به‌صورت $\begin{cases}x=x\left(r,s\right)\\ y=y\left(r,s\right)\end{cases}$ داده شده باشند، ژاکوپین x,y نسبت به s و r رابطه $J=\frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(r,s\right)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{vmatrix}$ نمایش داده می‌شود.

دیفرانسیل کامل توابع دو متغیره

برای تابع دو متغیره $z=f\left(x,y\right)$، دیفرانسیل کامل مرتبه nام به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$d^n z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z$$

مثلاً داریم:

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$

$$d^2 z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(dx\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(dy\right)^2$$

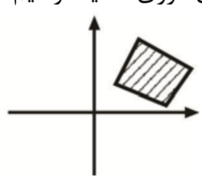
سری مکانیک

خلاصه درس فصل سوم:

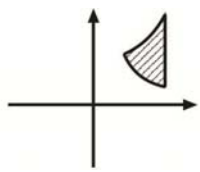
انتگرال‌های دوگانه

تعریف میدان (ناحیه) منظم در صفحه xy

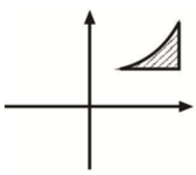
ناحیه D که در صفحه xy تعریف شده است را نسبت به محور xها منظم می‌گویند، هرگاه هر خط به موازات محور xها که از نقاط تلاقی منحنی‌های مرزی ناحیه ترسیم می‌کنیم از داخل این ناحیه عبور نکند.



نسبت به هر دو محور نامنظم



فقط نسبت به محور y منظم



نسبت به هر دو محور منظم

انواع مسایل انتگرال‌های دوگانه

۱) محاسبه یک انتگرال دوگانه وقتی حدود انتگرال‌ها در آن نوشته شده است

یک انتگرال دوگانه با حدود معلوم شده، ممکن است به یکی از دو فرم زیر بیان شود.

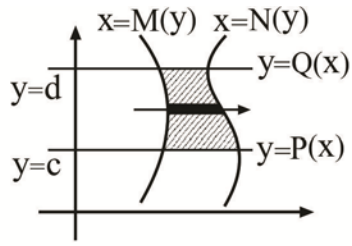
$$\int_{x=a}^{x=b}\int_{y=P(x)}^{y=Q(x)} f(x,y)\,dydx$$

$$\int_{y=c}^{y=d}\int_{x=M(y)}^{x=N(y)} f(x,y)\,dxdy$$

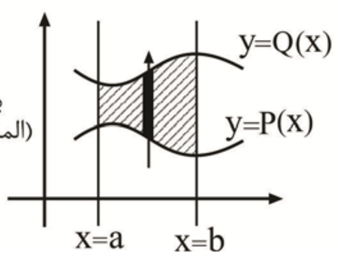
مثلاً برای محاسبه انتگرال بالایی کافی است از تابع $f(x,y)$ با فرض آن‌که x ثابت است، نسبت به متغیر y انتگرال بگیریم و پس از اعمال حدود y در این تابع اولیه، انتگرال یگانه معین حاصله را حل کنیم.

به عبارت ساده‌تر انتگرال‌گیری را باید با متغیری شروع کنیم که در حدود انتگرال‌ها موجود نباشد.

۲) روش نوشتن حدود انتگرال‌های دوگانه با توجه به ناحیه انتگرال‌گیری



ناحیه D نسبت به محور x منظم (المان موازی محورxها)



ناحیه D نسبت به محور y منظم (المان موازی محورyها)

$$\int_{y=C}^{d}\int_{x=M(y)}^{N(y)} f(x,y)\,dxdy$$

$$\int_{x=a}^{b}\int_{y=P(x)}^{Q(z)} f(x,y)\,dydx$$

تست‌های فصل سوم

بخش اول ـ محاسبات

۱- مقدار انتگرال دوگانه $\int_{0}^{1}\left[\int_{\beta}^{\beta+1}\frac{1}{x}dx\right]d\beta$ کدام است؟ (مکانیک ـ ۹۱)

۱) $\ln 2$
۲) $2\ln 2$
۳) $3\ln 2$
۴) واگرا است (تبدیل به یک انتگرال یگانه ناسره واگرا می‌شود.)

۲- تابع f روی ناحیه بسته و کراندار D پیوسته و S مساحت ناحیه D می‌باشد. در این صورت: (مکانیک ـ ۹۱)

۱) به ازای هر نقطه P از D: $\iint_D f(x,y)dA \neq f(P).S$
۲) یک نقطه P از D وجود دارد به طوری که: $\iint_D f(x,y)dA = f(P).S$
۳) به ازای هر نقطه P از D: $\iint_D f(x,y)dA \leq f(P).S$
۴) به ازای هر نقطه P از D: $\iint_D f(x,y)dA \geq f(P).S$

۳- اگر D، ناحیه محدود به مثلثی با رئوس $(0,0)$، $(2,\frac{1}{2})$ و $(2,2)$ باشد. حاصل $\iint_D \sqrt{x^2-xy}\,dA$، کدام است؟ (مکانیک ـ ۹۴)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
۳) $\sqrt{3}$
۴) $2\sqrt{3}$

۴- میانگین فاصله نقاط ناحیه D ربع قرص $x^2+y^2 \leq r_0^2$ واقع در ربع اول صفحه تا خط $x+y=0$، کدام است؟ (مکانیک ـ ۹۴)

۱) $\frac{2\sqrt{2}r_0}{3\pi}$
۲) $\frac{4r_0}{3\pi}$
۳) $\frac{4\sqrt{2}r_0}{3\pi}$
۴) $\frac{8r_0}{3\pi}$

۵- اگر a و b اعداد ثابت مثبت باشند، مقدار انتگرال $I=\int_0^a\int_0^b e^{\max(b^2x^2,a^2y^2)}dydx$، کدام است؟ (مکانیک ـ ۹۵)

۱) $\frac{e^{a^2b^2}-1}{ab}$
۲) $\frac{e^{a^2b^2}-1}{2ab}$
۳) $2\frac{e^{a^2b^2}-1}{ab}$
۴) $e^{a^2b^2}-1$

۶- اگر (a,b) مرکز ثقل ناحیه محدود به منحنی $y=\cos x$ در ناحیه اول صفحه مختصات باشد، حاصل $a-b$ کدام است؟

(مکانیک ـ۹۸)

۱) $\frac{\pi}{4}+1$
۲) $\frac{3\pi}{4}+1$
۳) $\frac{3\pi}{8}-1$
۴) $\frac{5\pi}{8}-1$

۷- مقدار حد $I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi(i+j)}{n}\right)$ کدام است؟ (عمران ـ ۹۳)

۱) $-\frac{2}{\pi^2}$
۲) $\frac{4}{\pi^2}$
۳) $\frac{2}{\pi^2}$
۴) $-\frac{4}{\pi^2}$

۵۹- مقدار $\iint_D (2x-y)^2 \sin^2(x+y)dxdy$ که در ن D ناحیه محدود به متوازی‌الاضلاعی به رئوس $(1,-1)$ و $(2,-2)$ و $(3,0)$ و $(0,3)$ باشد کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ ۹۷)

۱) $\frac{27}{4}(3-\sin 3)$ ۲) $\frac{9}{4}(6-\sin 6)$ ۳) $\frac{27}{4}(6-\sin 6)$ ۴) $\frac{81}{4}(6-\sin 6)$

بخش چهارم ـ قطبی

۶۰- مساحت ناحیه واقع در درون دایره‌ی $r=2$ و بیرون دلنمای $r=1+\cos\theta$ کدام است؟ (مکانیک ـ ۸۸)

۱) π ۲) 3π ۳) 2π ۴) $\frac{5}{2}\pi$

۶۱- مساحت ناحیه محدود به دو منحنی $r=2(1+\cos\theta)$ و $r=2(1+\sin\theta)$ ، کدام است؟ (مکانیک ـ۹۶)

۱) $9\pi-2-8\sqrt{2}$ ۲) $6\pi-8\sqrt{2}$ ۳) $\frac{9\pi}{2}-1-4\sqrt{2}$ ۴) $3\pi-4\sqrt{2}$

۶۲- اگر D ناحیه درون قرص $x^2+y^2\le e^2-1$ باشد، حاصل $\iint_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy$ ، کدام است؟ (مکانیک ـ۹۸)

۱) $\pi(e^2-1)$ ۲) $\pi(e^2+1)$ ۳) e^2-1 ۴) e^2+1

۶۳- اگر $(t>0)$ $F(t)=\iint_{x^2+y^2<t^2} \sin(x^2+y^2)dxdy$ باشد، $F'(t)$ کدام است؟ (مکانیک ـ۹۹)

۱) $2\pi\sin(t^2)$ ۲) $2\pi\sin(t^4)$ ۳) $2\pi t\sin(t^2)$ ۴) $2\pi t\sin(t^4)$

۶۴- حاصل $\iint_R (x^2-xy+y^2)dA$ که در آن R در ناحیه اول محصور به بیضی $x^2-xy+y^2=2$ است، کدام است؟

(مکانیک ـ۱۴۰۱)

۱) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ ۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi$ ۳) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ ۴) $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

۶۵- مقدار انتگرال $\iint_D \frac{dxdy}{x^2y}$ که در آن D ناحیه محصور به خطوط $y=x$ ، $y=2x$ ، $x+y=2$ و $2x+y=2$ می‌باشد، کدام است؟ (عمران ـ ۹۷)

۱) 1 ۲) $2\ln 2$ ۳) $\ln 2$ ۴) $\frac{1}{2}\ln 2$

۶۶- مساحت کل نواحی محدود به منحنی قطبی $r=\cos 3\theta$ کدام است؟ (MBA ـ ۹۱)

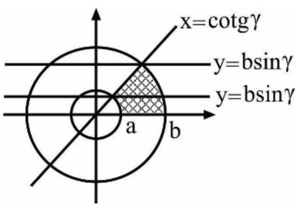
۱) π ۲) $\frac{3\pi}{4}$ ۳) $\frac{\pi}{4}$ ۴) $\frac{\pi}{2}$

۶۷- مجموع انتگرال‌های زیر با کدام گزینه برابر است؟ (MBA ـ۹۷)

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x} xydydx+\int_{1}^{\sqrt{2}}\int_{0}^{x} xydydx+\int_{\sqrt{2}}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$$

۱) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{\sqrt{2}} r^3\sin 2\theta drd\theta$ ۲) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{r^3}{2}\sin 2\theta drd\theta$

۳) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{2} r^3\sin 2\theta drd\theta$ ۴) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_1^{2} \frac{r^3}{2}\sin 2\theta drd\theta$



$$\begin{cases} x=\sqrt{b^2-y^2} \\ x=y\cot\gamma \end{cases} \Rightarrow y=b\sin\gamma$$

$$\begin{cases} x=\sqrt{a^2-y^2} \\ x=y\cot\gamma \end{cases} \Rightarrow y=a\sin\gamma$$

$$V=\iint_D rf(r,\theta)\,dr\,d\theta$$

$$f(x,y)=\sqrt{k^2-x^2-y^2} \Rightarrow f(r,\theta)=\sqrt{k^2-r^2}$$

$$x=y\cot\gamma \Rightarrow \frac{y}{x}=tg\gamma \Rightarrow \theta=Arctg\frac{y}{x}$$

$$\theta=Arctg(tg\gamma) \Rightarrow \theta=\gamma$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=b^2 \to r=b \\ x^2+y^2=a^2 \to r=a \end{cases}$$

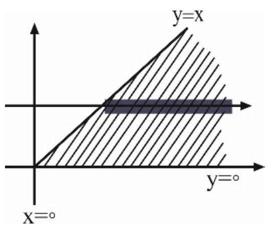
$$V=\int_0^{\gamma}\int_a^b r\sqrt{k^2-r^2}\,dr\,d\theta=\left(\frac{-1}{2}\times\frac{(k^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_a^b\left(\theta\Big|_0^{\gamma}\right) \to V=\frac{-\gamma}{3}\left((k^2-b^2)^{\frac{3}{2}}-(k^2-a^2)^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{\gamma}{3}\left((k^2-a^2)^{\frac{3}{2}}-(k^2-b^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

---

۲۸. گزینه ۴

با توجه به حدود انتگرال، باید انتگرال‌گیری را با متغیر y شروع کنیم که این موضوع امکان‌پذیر نیست، لذا از تغییر ترتیب استفاده می‌کنیم.

$$I=\int_{x=0}^{x=\infty}\int_{y=0}^{y=x} xe^{\frac{-x^2}{y}}\,dy\,dx \Rightarrow I=\int_0^{\infty}\int_y^{\infty} xe^{\frac{-x^2}{y}}\,dx\,dy$$



$$I=\int_0^{\infty}\int_y^{\infty}\frac{y}{-2}e^{\frac{-x^2}{y}}\,dx\,dy$$

$$I=\int_0^{\infty}\frac{y}{-2}\left(e^{\frac{-x^2}{y}}\Big|_y^{\infty}\right)dy$$

مشتق	انتگرال
$\frac{1}{2}y$ (+)	e^{-y}
$\frac{1}{2}$ (−)	$-e^{-y}$
0	e^{-y}

$$I=\int_0^{\infty}\frac{-y}{2}\left(e^{-\infty}-e^{\frac{-y^2}{y}}\right)dy$$

$$I=\int_0^{\infty}\frac{-y}{2}\left(0-e^{-y}\right)dy=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}ye^{-y}dy$$

$$I=\frac{-1}{2}ye^{-y}-\frac{1}{2}e^{-y}$$

$$I=\frac{-1}{2}e^{-y}(y+1)\Big|_0^{\infty}$$

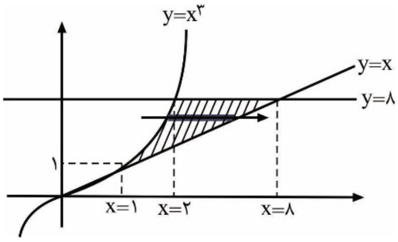
$$I=\left(\lim_{y\to\infty}\frac{-1}{2}e^{-y}(y+1)\right)-\left(\frac{-1}{2}e^{0}(0+1)\right)$$

$$I=\left(\lim_{y\to+\infty}\frac{\frac{-1}{2}(y+1)}{e^{y}}\right)-\left(\frac{-1}{2}\right)=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

---

۲۹. گزینه ۳

$$V=\int_{۱}^{۲}\int_{x}^{x^{۳}} f(x,y)\,dy\,dx+\int_{۲}^{۸}\int_{x}^{۸} f(x,y)\,dydx$$



ناحیه D $\begin{cases} y=x^{۳}\\ y=x\\ y=۸\\ x=۱\\ x=۲\\ x=۸\end{cases}$

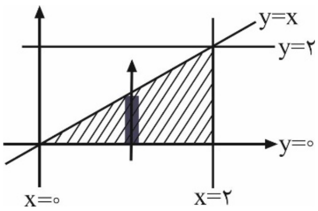
$\begin{cases} x\rightarrow \text{منظم}\\ y\rightarrow \text{نامنظم}\end{cases}$

تغییر ترتیب : $V=\int_{۱}^{۸}\int_{\sqrt[۳]{y}}^{y} f(x,y)\,dxdy$

---

۳۰. گزینه ۱

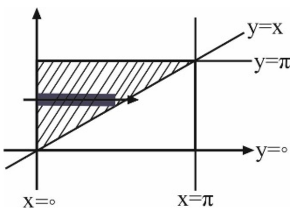
$$I=\int_{\circ}^{۲}\int_{y}^{۲} e^{x^{۲}}dxdy+\int_{\circ}^{\pi}\int_{x}^{\pi}\frac{\sin y}{y}dydx$$



$$I_{۱}=\int_{\circ}^{۲}\int_{y}^{۲} e^{x^{۲}}dxdy \xrightarrow{\text{ناحیه}} \begin{cases} x=۲\\ x=y\\ y=\circ\\ y=۲\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر ترتیب}} I_{۱}=\int_{\circ}^{۲}\int_{\circ}^{x} e^{x^{۲}}dxdy=\int_{\circ}^{۲} e^{x^{۲}}\left(y\Big|_{\circ}^{x}\right)dx$$

$$I_{۱}=\int_{\circ}^{۲} xe^{x^{۲}}dx=\frac{۱}{۲}e^{x^{۲}}\Big|_{\circ}^{۲}=\frac{۱}{۲}(e^{۴}-e^{\circ})=\frac{۱}{۲}(e^{۴}-۱)$$



$$I_{۲}=\int_{\circ}^{\pi}\int_{x}^{\pi}\frac{\sin y}{y}dydx \xrightarrow{\text{ناحیه}} \begin{cases} y=\pi\\ y=x\\ x=\circ\\ x=\pi\end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{تغییر ترتیب}} I_{۲}=\int_{\circ}^{\pi}\int_{\circ}^{y}\frac{\sin y}{y}dxdy=\int_{\circ}^{\pi}\frac{\sin y}{y}\left(x\Big|_{\circ}^{y}\right)dy$$

$$I_{۲}=\int_{\circ}^{\pi}\frac{\sin y}{y}(y)\,dy=\int_{\circ}^{\pi}\sin y dy=-\cos y\Big|_{\circ}^{\pi}=-(-۱-۱)=۲$$

$$I=I_{۱}+I_{۲}=\frac{۱}{۲}(e^{۴}-۱)+۲$$

تست‌های فصل چهارم

بخش اول ـ منحنی‌الخط نوع ۱

۱- مختصات مرکز ثقل اولین قوس سیکلوئید $p\begin{cases} x = ۳(۱-\cos t) \\ y = ۳(t-\sin t)\end{cases}$, $۰ \le t \le ۲\pi$، کدام است؟ (مکانیک ـ۱۴۰۰)

۱) $(۳,۴\pi)$ ۲) $(۴,۳\pi)$ ۳) $(۲,۳\pi)$ ۴) $(۳,۲\pi)$

۲- مساحت رویه حاصل از دوران بخشی از منحنی $r^۲ = a^۲\cos ۲\theta;(a>۰)$ که در ربع اول صفحه مختصات قرار دارد، حول محور y ها کدام است؟ (مکانیک ـ۱۴۰۱)

۱) $\sqrt{۲}\pi a^۲$ ۲) $۲\sqrt{۲}\pi a^۲$ ۳) $\pi a^۲$ ۴) $۲\pi a^۲$

۳- طول قوس منحنی $y = \frac{x^۴}{۸} + \frac{۱}{۴x^۲}$ از $x = ۱$ تا $x = ۲$ برابر است با : (عمران ـ۸۸)

۱) ۱۵ ۲) $\frac{۳۳}{۱۶}$ ۳) $\frac{۲۵}{۳}$ ۴) ۲۱

۴- مقدار انتگرال $\int_C (x+y)ds$ که در آن C منحنی $\begin{cases} x = t-\sin t \\ y = ۱-\cos t\end{cases}$ از نقطه $(۰,۰)$ تا نقطه $(۲\pi,۰)$ می‌باشد، کدام است؟ (عمران ـ ۹۶)

۱) $۴\pi + \frac{۱۶}{۳}$ ۲) $۴\pi + \frac{۳۲}{۳}$ ۳) $۸\pi + \frac{۱۶}{۳}$ ۴) $۸\pi + \frac{۳۲}{۳}$

۵- فرض کنید خم C فصل مشترک دو رویه $\frac{x^۲}{۸} + \frac{y^۲}{۴} = ۱$ و $\frac{x^۲}{۸} + \frac{z^۲}{۴} = ۱$ در یک هشتم اول باشد، طول قوس خم C کدام است؟ (عمران ـ ۹۷)

۱) $\frac{(۱+\sqrt{۲})\pi}{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}\pi$ ۳) $\sqrt{۲}\pi$ ۴) π

۶- طول قوس منحنی $f(x) = \sqrt{x-x^۲} + \arcsin\sqrt{x}$ برای $\frac{۱}{۹} \le x \le \frac{۱}{۴}$ کدام است؟ (MBA ـ ۹۳)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) ۱

۷- اگر $y(t) = \sin t, x(t) = \cos t + \ln\tan\frac{t}{۲}$ معادلات پارامتری یک خم در صفحه و $\frac{۲\pi}{۳} \le t \le \frac{۵\pi}{۶}$ باشد، آن‌گاه المان طول قوس خم کدام است؟ (MBA ـ ۹۴)

۱) $ds = -\cot t\,dt$ ۲) $ds = ۲\sin\frac{t}{۲}dt$ ۳) $ds = \cot t\,dt$ ۴) $ds = ۲\cos\frac{t}{۲}dt$

۸- منحنی به معادله $y = \cosh x$ در بازه $[۰,۲]$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم، سطح رویه دوار حاصل چند برابر $\frac{\pi}{۲}$ است؟ (MBA ـ ۹۵)

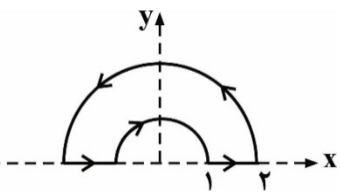
۱) $۲+\cosh ۲$ ۲) $۲+\sinh ۲$ ۳) $۴+\cosh ۴$ ۴) $۴+\sinh ۴$

۵۰- اگر منحنی C توسط $r(t)=(\cos t,\sin ۲t,\cos ۲t);t\in[۰,۲\pi]$ توصیف شده و $F(x,y,z)=\left(e^{x^۳},\dfrac{۳z}{y^۲+z^۲},\dfrac{-۳y}{y^۲+z^۲}\right)$ باشد، آن‌گاه $\int_C F.dr$ کدام است؟ (ژئوفیزیک و هواشناسی ـ ۹۸)

۱) ۰ ۲) ۵π ۳) ۸π ۴) ۱۲π

بخش سوم ـ قضیه گرین

۵۱- فرض کنید C منحنی بسته متشکل از دو نیم‌دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ و دو پاره‌خط مطابق شکل زیر باشد. مقدار $I=\int_C y^۳dx-x^۳dy$ کدام است؟ (مکانیک ـ ۸۸)



۱) $-\dfrac{۳۵}{۳}\pi$ ۲) $-\dfrac{۴۵}{۴}\pi$ ۳) -۱۱π ۴) -۱۲π

۵۲- مساحت ناحیه محصور به منحنی بسته C به معادله‌ی $r(t)=t^۲\vec{i}+(\dfrac{t^۳}{۳}-t)\vec{j}\ ,\ -\sqrt{۳}\le t\le\sqrt{۳}$ کدامیک از موارد زیر است؟ (مکانیک ـ ۹۰)

۱) $\dfrac{۱}{۲}-\sqrt{۳}$ ۲) $۱-\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\dfrac{۱}{۲}+\sqrt{۳}$ ۴) $۱+\dfrac{\sqrt{۳}}{۲}$

۵۳- اگر C مثلث تشکیل شده از اضلاع $x=۰\ ,\ x+y=۱$ و $y=۰$ در صفحه‌ی xy باشد، مقدار انتگرال روی منحنی $\oint_C y^۲dx+x^۲dy$، کدام است؟ (C پیموده شده در جهت مثبت است). (مکانیک ـ ۹۵)

۱) ۰ ۲) $-\dfrac{۱}{۳}$ ۳) $\dfrac{۲}{۳}$ ۴) $\dfrac{۱}{۳}$

۵۴- فرض کنید $C_۱$ منحنی بسته $x^۲+y^۲=۲۵$ در جهت مثلثاتی و $C_۲$ منحنی بسته $\dfrac{x^۲}{۴}+\dfrac{y^۲}{۹}=۱$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد. مقدار $\int_{C_۱\cup C_۲} xdy-ydx$ کدام است؟ (مکانیک ـ ۹۹)

۱) ۳۸π ۲) ۳۶π ۳) ۳۱π ۴) ۱۹π

۵۵- مقدار انتگرال $\oint_C (x-y^۳)dx+(y^۳+x^۳)dy$ که درآن C مرز یک چهارم قرص $x^۲+y^۲\le a^۲$ ، $x\ge۰$ ، $y\ge۰$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌باشد، برابر با کدام مورد است؟ (عمران ـ ۸۸)

۱) $\dfrac{۱}{۲}\pi a^۳$ ۲) $\dfrac{۳}{۴}\pi a^۴$ ۳) $\dfrac{۳}{۸}\pi a^۳$ ۴) $\dfrac{۳}{۸}\pi a^۴$

۵۶- مقدار انتگرال $\oint_C (x\sin y^۲-y^۲)dx+(x^۲y\cos y^۲+۳x)dy$ که در آن C ذوزنقه به رئوس $(۰,-۲)$، $(۱,-۱)$، $(۱,۱)$ و $(۰,۲)$ می‌باشد که یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است، کدام است؟ (عمران ـ ۸۹)

۱) ۹ ۲) ۶ ۳) ۳ ۴) ۱۲

۵۷- مقدار انتگرال $\oint_C xy\,dx+x^۲dy$ که در آن C منحنی بسته محدود به سهمی‌های $y^۲=x,y=x^۲$ است که یک بار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده شده است برابر است با: (عمران ـ ۹۰)

۱) $\dfrac{۳}{۲۰}$ ۲) $\dfrac{۲۷}{۲۰}$ ۳) $\dfrac{۳}{۵}$ ۴) $\dfrac{۱}{۵}$

$$L=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+\left(\sqrt{3}\cos t\right)^2+\left(\sqrt{2}\sin t\right)^2}\,dt$$

$$L=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+3\cos^2 t+2\sin^2 t}\,dt$$

$$L=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{3\sin^2 t+3\cos^2 t}\,dt=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{3}dt=\sqrt{3}t\Big|_{0}^{2\pi}$$

$$L=2\sqrt{3}\pi$$

---

۲۸. گزینه ۲

$$w=\int_c \vec{F}.d\vec{r}=\int_c Pdx+Qdy+Rdz$$

$$w=\int_c \underbrace{\left(z^3+2xy\right)}_{P}dx+\underbrace{\left(x^2\right)}_{Q}dy+\underbrace{\left(3xz^2\right)}_{R}dz$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial y}=2x\\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial z}=3z^2\\ \dfrac{\partial R}{\partial x}=3z^2\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial z}=0\\ \dfrac{\partial R}{\partial y}=0\end{cases}$$

با توجه به برابری هرکدام از روابط، انتگرال مستقل از مسیر است، چون مسیر حرکت یک مسیر بسته است حاصل انتگرال صفر است ولی برای تمرین تابع پتانسیل را پیدا می‌کنیم.

$$u=\int Pdx=\int (z^3+2xy)dx=z^3x+2\frac{x^2}{2}y+c_1=xz^3+x^2y+c_1$$

$$u=\int Qdy=\int (x^2)dy=x^2y+c_2$$

$$u=\int Rdz=\int (3xz^2)dz=3x\frac{z^3}{3}+c_3=xz^3+c_3$$

$u=$ اجتماع جواب‌ها $\Rightarrow u=xz^3+x^2y+c$

---

۲۹. گزینه ۲

ابتدا معادله خطی که از نقاط $A(0,1,-1)$ و $B(1,2,1)$ عبور می‌کند را پیدا می‌کنیم و آن را به فرم پارامتری بیان می‌کنیم.

$$\overline{AB}=(1-0)\hat{i}+(2-1)\hat{j}+(1-(-1))\hat{k}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$$

معادله خط AB : $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z+1}{2}=t\begin{cases}x=t \ \rightarrow \ dx=dt\\ y=t+1 \ \rightarrow \ dy=dt\\ z=2t-1 \ \rightarrow \ dz=2dt\end{cases}$

چون از نقطه $A(0,1,-1)$ تا نقطه $B(1,2,1)$ حرکت کرده‌ایم. از نقطه نظیر $t=0$ تا نقطه نظیر $t=1$ حرکت کرده‌ایم.

$$I=\int_c \left(ydx+zdy-xdz\right)$$

$$I=\int_c \left((t+1)dt+(2t-1)dt-(t)(2dt)\right)$$

$$I=\int_0^1 (t+1+2t-1-2t)dt=\int_0^1 tdt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$$
