سری مکانیک

خلاصه درس فصل اول:

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

ـ مروری بر مقدمات معادلات دیفرانسیل

انتگرال به معنای تابع اولیه بوده که به وسیله آن می‌توان تابعی که مشتق آن معلوم است را به دست آورد. انتگرال عملگر خطی بوده لذا خواص عملگرهای خطی را دارا خواهد بود.

$$y = F(x) \quad \rightarrow \quad y' = f(x)$$

مفهوم انتگرال نامعین : $\int f(x)dx = F(x) + C$

مفهوم انتگرال معین : $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

خاصیت خطی انتگرال : $\int \left(af(x) \pm bg(x)\right)dx = a\int f(x)dx \pm b\int g(x)dx$

فرمول‌ها و روابط مقدماتی انتگرال

۱) $\int a\,dx = ax + C$

۲) $\int ax^n\,dx = \begin{cases} a \times \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C & : \quad n \neq -1 \\ a \times \ln|x| + C & : \quad n = -1 \end{cases}$

۳) $\int au'u^n\,dx = \begin{cases} a \times \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + C & : \quad n \neq -1 \\ a\ \ln|u| + C & : \quad n = -1 \end{cases}$

۴) $\int (ax+b)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{a} \times \dfrac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C & : \quad n \neq -1 \\ \dfrac{1}{a}\ \ln|ax+b| + C & : \quad n = -1 \end{cases}$

۵) $\int e^{ax+b}\,dx = \dfrac{1}{a}e^{ax+b} + C$

۶) $\int u'e^u\,dx = e^u + C$

۷) $\int u'a^u\,dx = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

۸) $\int \sin ax\,dx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + C$

۹) $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax + C$

۱۰) $\int \left(1+\tan^2 ax\right)dx = \frac{1}{a}\tan ax + C$

۱۱) $\int \left(1+\cot^2 ax\right)dx = -\frac{1}{a}\cot ax + C$

۱۲) $\int \tan ax\,dx = -\frac{1}{a}\ln\left|\cos ax\right| + C$

۱۳) $\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\left|\sin ax\right| + C$

۱۴) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\operatorname{Arc}\tan\frac{x}{a} + C$

۱۵) $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$

تذکر: برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ که در آن P و Q دو چندجمله‌ای بر حسب x بوده به طوریکه درجه صورت کمتر از مخرج باشد و مخرج عبارتی غیرقابل تجزیه باشد، کافی است در مخرج کسر مربع کامل تشکیل دهیم.

چند نکته

۱) بسیاری مواقع برای پاسخ به یک سوال خاص در یک معادله دیفرانسیل، نیازی به حل معادله نیست و خواسته مورد نظر را می‌توان از المان های موجود در مسئله پیدا کرد.

۲) گاهی لازم می‌شود یک معادله دیفرانسیل را با یک تغییر متغیر یا یک تغییر تابع مشخص بازنویسی کنیم. برای این منظور باید با توجه به آن تغییر، مشتقات موجود در معادله را بازنویسی کرده و در داخل معادله اصلی قرار دهیم.

یادآوری چند موضوع:

۱) قضیه لایپ نیتس:

بافرض $f(x) = \int_{P(x)}^{Q(x)} h(x,t)dt$ داریم:

$$f'(x) = Q'(x).h\left(x,Q(x)\right) - P'(x).h\left(x,P(x)\right) + \int_{P(x)}^{Q(x)} \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}dt$$

و در حالت خاص داریم:

الف) اگر $f(x) = \int_{\alpha}^{\beta} h(x,t)dt$ (α,β اعداد ثابتند) آن‌گاه:

$$f'(x) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial h(x,t)}{\partial x}dt$$

ب) اگر $f(x) = \int_{P(x)}^{Q(x)} h(t)dt$ آن‌گاه:

$$f'(x) = Q'(x).h\left(Q(x)\right) - P'(x).h\left(P(x)\right)$$

تذکر: از آن‌جا که مشتق و انتگرال نامعین، عکس اعمال همدیگرند، لذا بدیهی است:

$$\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$$

۲) قضیه آزمون مشتق دوم:

الف) اگر $f'(a)=0$, $f''(a)>0$ آن‌گاه $f(x)$ در $x=a$ دارای min نسبی است.

ب) اگر $f'(a)=0$, $f''(a)<0$ آن‌گاه $f(x)$ در $x=a$ دارای max نسبی است.

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

فرم کلی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول به صورت $F(x, y, y') = 0$ می‌باشد، که در وضعیت‌هایی خاص قابل حل است.
برخی مواردی که ممکن است به عنوان یک تست مورد سؤال قرار گیرد را مرور می‌کنیم.

۱) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول جدائی‌پذیر

هرگاه بتوانیم یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول را در قالب $A(x)\,dx = B(y)\,dy$ بنویسیم، معادله را از نوع جدایی‌پذیر گفته و با انتگرال‌گیری از طرفین این رابطه، جواب عمومی به‌دست می‌آید.

توجه: در معادلات دیفرانسیلی به فرم $y' = f(ax + by + c)$ با جانشینی $u(x) = ax + by + c$ که نتیجه می‌دهد $u' = a + by'$، به یک معادله جدایی‌پذیر برای تابع $u(x)$ خواهیم رسید.

۲) معادلات دیفرانسیل مرتبه اول با توابع همگن

یادآوری:

همان‌طوری‌که می‌دانیم تابع $f(x, y)$ را همگن از درجه α می‌گویند هرگاه:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^{\alpha} f(x, y)$$

در معادله دیفرانسیل $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ هرگاه توابع P و Q توابعی همگن بادرجه همگنی یکسان باشند، معادله را از نوع مرتبه اول با توابع همگن گفته و با جانشینی $y = x\,u(x)$ که نتیجه می‌دهد $y' = u(x) + x\,u'(x)$، به یک معادله جدایی‌پذیر برای تابع $u(x)$ خواهیم رسید.

توجه: در معادلات دیفرانسیل $y' = \dfrac{ax + by + c}{mx + ny + k}$ اگر دو خط $mx + ny + k = 0$ و $ax + by + c = 0$ موازی باشند با تغییر تابع $u(x) = ax + by + c$ معادله به نوع جدایی‌پذیر تبدیل می‌شود و اگر دو خط مذکور همدیگر را در نقطه (x_0, y_0) قطع کنند با جانشینی‌های $y = Y + y_0$ و $x = X + x_0$ معادله به فرم توابع همگن تبدیل می‌شود.

۳) معادلات دیفرانسیل کامل

معادله دیفرانسیل $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ را کامل می‌گویند هرگاه $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ باشد. در چنین شرایطی جواب عمومی معادله به صورت $u(x, y) = c$ خواهد بود که تابع u را باید از حل دستگاه $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases}$ به‌دست آورد.

عامل انتگرال‌ساز

اگر معادله دیفرانسیل $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ کامل نباشد، ممکن است بتوانیم تابعی مانند $\mu(x, y)$ به‌گونه‌ای بیابیم که با ضرب آن در معادله فوق، به یک معادله کامل برسیم یعنی $P\mu\,dx + Q\mu\,dy = 0$ کامل باشد. (این می‌طلبد که $\dfrac{\partial(P\mu)}{\partial y} = \dfrac{\partial(Q\mu)}{\partial x}$ باشد.

در این شرایط $\mu(x, y)$ را یک عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل مورد نظر می‌گوئیم (این تابع یکتا نمی‌باشد).

برای یافتن عامل انتگرال‌ساز ممکن است یکی از بحث‌های زیر مفید باشد:

الف) گاهی در گزینه‌های پیشنهادی یک ساختار مشترک دیده می‌شود، در این وضعیت کافی است فرم کلی این ساختار مشترک را در نظر گرفته و با ضرب آن در معادله دیفرانسیل مورد نظر، شرط کامل شدن معادله حاصله را نوشته و تکلیف μ را معلوم کنیم.

(به‌خصوص این ساختار مشترک بسیاری مواقع ممکن است دارای فرم کلی $x^a y^b$ باشد.)

ب) اگر $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = h(x)$ آنگاه $\mu(x) = e^{\int h(x)\,dx}$ یک عامل انتگرال‌ساز خواهد بود.

ج) اگر $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=h(y)$ آنگاه $\mu(y)=e^{-\int h(y)\,dy}$ یک عامل انتگرال‌ساز خواهد بود.

۴) معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی

جواب عمومی یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی مانند:

$$1\,y'+P(x)y=Q(x)$$

به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$y(x)=e^{-\int P(x)\,dx}\left\{\int Q(x)\,e^{\int P(x)\,dx}\,dx+c\right\}$$

۵) معادله دیفرانسیل مرتبه اول برنولی

معادله دیفرانسیل مرتبه اولی به صورت $y'+P(x)\,y=Q(x)\,y^n$ (که در آن n عددی ثابت مخالف صفر و یک می‌باشد) را از نوع برنولی می‌گویند.

با جانشینی $u(x)=y^{1-n}$ که نتیجه می‌دهد $u'(x)=(1-n)\,y^{-n}\,y'$ چنانچه ابتدا طرفین معادله برنولی مورد نظر را بر y^n تقسیم کرده و حاصل را برحسب $u(x)$ بازنویسی کنیم یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی برای $u(x)$ ایجاد می‌شود که قابل حل با روال مربوطه خواهد بود.

۶) مسیرهای قائم یک دسته منحنی

دو دسته منحنی را مسیرهای قائم یکدیگر می‌گوئیم هرگاه هر کدام از منحنی‌های یک دسته، بر هر کدام از منحنی‌های دسته دیگر، عمود باشند.

الف) اگر معادله یک دسته منحنی در مختصات دکارتی با رابطه $\varphi(x,y,c)=0$ بیان شده باشد، با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به متغیر x و سپس حذف c بین روابط موجود، معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی به‌دست می‌آید، با تبدیل $\frac{dy}{dx}$ به $-\frac{dx}{dy}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم حاصل می‌گردد که از حل آن مسیرهای قائم دسته منحنی‌های اولیه مشخص می‌گردد.

ب) اگر معادله یک دسته منحنی در مختصات قطبی با رابطه $\varphi(r,\theta,c)=0$ بیان شده باشد، با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به متغیر θ و سپس حذف c بین روابط موجود، معادله دیفرانسیل مسیرهای اصلی به‌دست می‌آید، با تبدیل $\frac{dr}{d\theta}$ به $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم حاصل می‌گردد که از حل آن مسیرهای قائم دسته منحنی‌های اولیه مشخص می‌گردد.

تست‌های فصل اول

بخش اول: معادلات دیفرانسیلی که نیاز به حل ندارند

۱ـ با تغییر متغیر $z = x^2$ معادله دیفرانسیل زیر به کدام معادله تبدیل می‌شود؟ (مکانیک ۸۶)

$$x^2y'' - 3xy' + 4\left(x^4 - 1\right)y = 0 \quad \left(\frac{dy}{dz} = \dot{y}\right)$$

۱) $z^2\ddot{y} - z\dot{y} + \left(z^2 - 1\right)y = 0$
۲) $z^2\ddot{y} + z\dot{y} + \left(z^2 - 1\right)y = 0$
۳) $2z^2\ddot{y} - 3z\dot{y} + 2\left(z^2 - 1\right)y = 0$
۴) $z\ddot{y} - 3\sqrt{z}\dot{y} + 4\left(z^2 - 1\right)y = 0$

۲ـ منحنی‌های میدان برداری $F = xzi + 2x^2zj + x^2k$ که در هر نقطه (x,y,z) بر بردار میدان در آن نقطه مماس است، دارای کدام معادلات‌اند؟ (مکانیک ۸۷)

۱) $\begin{cases} y = x^2 + c_1 \\ y^2 = z^2 + c_2 \end{cases}$
۲) $\begin{cases} y^2 = x^2 + c_1 \\ y = z^2 + c_2 \end{cases}$
۳) $\begin{cases} y = x^2 + c_1 \\ y = z^2 + c_2 \end{cases}$
۴) $\begin{cases} y^2 = x^2 + c_1 \\ y^2 = z^2 + c_2 \end{cases}$

۳ـ با تغییر متغیر $z = \sqrt{x}$ معادله دیفرانسیل زیر به کدام معادله تبدیل می‌شود؟ (مکانیک ۸۷)

$$4x^2y'' + 4xy' + (x - 4)y = 0 \qquad \left(\dot{y} = \frac{dy}{dz}\right)$$

۱) $z^2\ddot{y} + z\dot{y} + \left(z^2 - 4\right)y = 0$
۲) $z^2\ddot{y} + 2z\dot{y} + \left(z^2 - 4\right)y = 0$
۳) $4z^4\ddot{y} + 4z^2\dot{y} + \left(z^2 - 4\right)y = 0$
۴) $z^2\ddot{y} - z\dot{y} + \left(z^2 - 4\right)y = 0$

۴ـ در مورد نقطه‌ی $x = 1$ در جواب مسأله مقدار اولیه $\begin{cases} 2xy' + 3xy - 1 = -4x^2 + \mathrm{Ln}x \\ y(1) = -1 \end{cases}$، کدام مورد صحیح است؟ (مکانیک ۹۵)

۱) عطف است.
۲) ماکزیمم نسبی است.
۳) معمولی است.
۴) مینیمم نسبی است.

۵ـ با تغییر متغیر $Z = \frac{x^2}{2}$، معادله دیفرانسیل $x > 0$، $xy'' + \left(x^2 - 1\right)y' + x^3y = 0$ به کدام معادله‌ای تبدیل می‌شود؟ (عمران ۸۹)

۱) $4\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz} + y = 0$
۲) $2\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} + y = 0$
۳) $\frac{d^2y}{dz^2} + y = 0$
۴) $\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + y = 0$

۶ـ با تغییر متغیر $x = \tan t$ معادله زیر به چه معادله‌ای تبدیل خواهد شد؟ (عمران ۹۳)

$$\left(1 + x^2\right)^2 y'' + (1 + 2x)\left(1 + x^2\right)y' + y = 0$$

۱) $y''_t + y'_t + y = 0$
۲) $y''_t - y'_t + y = 0$
۳) $y''_t + y'_t - y = 0$
۴) $y''_t - y'_t - y = 0$

۷ـ فرض کنید $2y'' + \frac{x+1}{x}y' + y = 0$ با تغییر متغیر $x = t^2$ این معادله به کدام معادله تبدیل می‌شود؟ $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2}$ و $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$ (مواد ۸۹)

۱) $\ddot{y} + t\dot{y} + t^2y = 0$
۲) $\ddot{y} + t\dot{y} + 2t^2y = 0$
۳) $2\ddot{y} + \dot{y} + 2t^2y = 0$
۴) $t\ddot{y} + \left(t^2 + 2\right)\dot{y} + 2t^3y = 0$

۸ـ فرض کنید y جواب معادله دیفرانسیل $x^2y' + 2xy - y^2 = 0$، باشد مقدار $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{y}$ کدام است؟ (معدن ۹۹)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) -1 ۳) 0 ۴) وجود ندارد.

۹ـ با تغییر متغیر $y^2 = u$، معادله $(xy' - y)^2 = -x^2yy''$ به کدام معادله زیر تبدیل می‌شود؟ (معماری کشتی ۹۵)

۱) $x^2u'' - xu' + 2u = 0$ ۲) $2x^2u'' - xu' - u = 0$

۳) $x^2u'' - 2xu' + 2u = 0$ ۴) $2x^2u'' + xu' - u = 0$

۱۰ـ در مسئله مقدار اولیه $y(0) = 1, y' = 2y^2 + xy^2$ در نقطه‌ای که در آن مقدار y' صفر است، کدام گزینه صحیح است؟

(بیومکانیک ۹۷)

۱) نقطه عطف جواب است. ۲) نقطه می‌نیمم جواب است.

۳) نقطه ماکزیمم جواب است ۴) نقطه‌ای که در آن y' صفر شود وجود ندارد.

بخش دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول جدایی‌پذیر، معادلات دیفرانسیل با توابع همگن معادلات انتگرالی

۱۱ـ جواب عمومی معادله $y' = \frac{x-y}{2x-2y+1}$ کدام است؟ (مکانیک ۸۹)

۱) $x - 2y - \ln(x-y) = c$ ۲) $x - 2y - \ln(x-y+1) = c$

۳) $2(x-y) + \ln(x-y) = c$ ۴) $2(x-y) + \ln(x-y+1) = c$

۱۲ـ معادله دیفرانسیل $y'(\sin y + \frac{y}{\cos y}) = -\pi \sin x \cos x \cos y$ مفروض است. جوابی که از نقطه $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{4})$ عبور می‌کند به ازای $x = \frac{\pi}{4}$ دارای کدام مقدار y است؟ (مکانیک ۹۰)

۱) 0 ۲) $\frac{\pi}{6}$ ۳) $\frac{\pi}{2}$ ۴) $\frac{\pi}{3}$

۱۳ـ جواب عمومی معادله دیفرانسیل $\frac{\sqrt{1+x^2}dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2}$ کدام است؟ (مکانیک ۹۱)

۱) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + c = \arctan y$ ۲) $x - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan y + c$

۳) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = c - \arctan y$ ۴) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c = \arctan y$

۱۴ـ جواب معادله دیفرانسیل $(x\tan\frac{y}{x} - y\sec^2\frac{y}{x})dx + x\sec^2\frac{y}{x}dy = 0$، کدام است؟ $(\sec x = \frac{1}{\cos x})$ (مکانیک ۹۷)

۱) $x + \tan\frac{y}{x} = C$ ۲) $x^2\tan\frac{y}{x} = C$ ۳) $x\tan\frac{y}{x} = C$ ۴) $x^2 + \tan\frac{y}{x} = C$

۱۵ـ جواب معادلهٔ دیفرانسیل معمولی $2xydx + (x^2 - 1)dy = 0$ کدام است؟ (برق ۸۵)

۱) $y = x^2 + c$ ۲) $y = \frac{c}{1-x^2}$ ۳) $y = x^4 - 2x + 1$ ۴) $y = \frac{cx}{1-x^4}$

۱۴۶ـ پوش خانواده خط‌های مستقیم $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \rho$ کدام است؟ (هوافضا ۹۲)

۱) بیضی ۲) دایره ۳) سهمی ۴) هذلولی

۱۴۷ـ جواب غیرعادی معادله $y = xy' - \sin y'$ کدام است؟ (هوافضا ۹۴)

۱) $x = \cos\left(\frac{y+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$ ۲) $x = \sin\left(\frac{y+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$

۳) $y = \cos\left(\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{y}\right)$ ۴) $y = \sin\left(\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{y}\right)$

۱۴۸ـ مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $\cosh y = \alpha x$ (α پارامتر) کدام است؟ (هوافضا ۹۶)

۱) $x^2 + \ln(\cosh y) = c$ ۲) $x^2 + \ln(\sinh y) = c$

۳) $x^2 - 2\ln(\cosh y) = c$ ۴) $x^2 + 2\ln(\sinh y) = c$

۱۴۹ـ مسیرهای قائم بر دسته منحنی $y = e^{cx}$ کدام است؟ (هوافضا ۹۷)

۱) $x^2 + y^2(1-2\ln y) = c$ ۲) $x^2 - y^2(1-2\ln y) = c$

۳) $2x^2 + y^2(1-2\ln y) = c$ ۴) $2x^2 - y^2(1-2\ln y) = c$

۱۵۰ـ مقدار k چقدر باشد تا سهمی‌های $y = c_1x^2 + k$ مسیرهای قائم بیضی‌های $x^2 + 2y^2 - y = c_2$ (c_1 و c_2 پارامتر هستند) باشند؟ (معدن ۹۳)

۱) $\frac{-1}{2}$ ۲) $\frac{-1}{4}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۱۵۱ـ مسیرهای متعامد به دسته سهمی‌های $y = cx^2$ کدام است؟ (معدن ۹۴)

۱) دایره ۲) سهمی ۳) بیضی ۴) هذلولی

۱۵۲ـ اگر منحنی‌های $x^n + y^n = a$ مسیرهای قائم خانواده $y = \frac{x}{1-bx}$ باشد، n کدام است؟ (معدن ۹۶)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۵۳ـ جواب غیرعادی معادله دیفرانسیل $y - xy'^3 = 0$ کدام است؟ (معدن ۹۸)

۱) $4y^3 = 27x^2$ ۲) $27y^2 = 4x^3$ ۳) $27y^2 + 4x^3 = 0$ ۴) $4y^3 + 27x^2 = 0$

۱۵۴ـ مسیرهای متعامد منحنی‌های $y = \frac{x}{kx-1}$، کدام است؟ (معدن ۹۹)

۱) $y^2 - x^2 = k$ ۲) $y^2 + x^2 = k$ ۳) $y^3 - x^3 = k$ ۴) $y^3 + x^3 = k$

۱۵۵ـ جواب منفرد (غیرعادی) معادله دیفرانسیل $y = xy' + e^{y'}$ در دامنه $(-\infty, 0)$ کدام است؟ (معدن ۱۴۰۰)

۱) $y - x(\ln|x| + 1) = 0$ ۲) $y + x(\ln|x| + 1) = 0$

۳) $y + x(\ln|x| - 1) = 0$ ۴) $y - x(\ln|x| - 1) = 0$

۱۵۶ـ مسیرهای متعامد منحنی‌های $x^2y^2 = Ce^{-y}$، کدام است؟ (بیومکانیک ۹۹)

۱) $y - 2\ln|y+2| + x = c$ ۲) $y - 2\ln|y+2| + x^2 = c$

۳) $4y - 8\ln|y+2| - x = c$ ۴) $4y - 8\ln|y+2| - x^2 = c$

پاسخ تست‌های فصل اول

۱.گزینه ۱

$$z=x^{۲} \xrightarrow{\text{مشتق}} dz=۲xdx \xrightarrow{\div dx} \frac{dz}{dx}=۲x$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=۲x\frac{dy}{dz}=۲x\dot{y}$$

$$y''=\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}\left(۲x\frac{dy}{dz}\right)(۲x)=\left(۲\frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz}+۲x\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}\right)(۲x)=\left(۲\times\frac{۱}{۲x}\times\frac{dy}{dz}+۲x\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}\right)(۲x)$$

$$=۲\frac{dy}{dz}+۴x^{۲}\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}=۲\dot{y}+۴x^{۲}\ddot{y}$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله دیفرانسیل داریم:

$$x^{۲}y''-۳xy'+۴\left(x^{۴}-۱\right)y=۰ \rightarrow x^{۲}\left(۲\dot{y}+۴x^{۲}\ddot{y}\right)-۳x\left(۲x\dot{y}\right)\times۴\left(x^{۴}-۱\right)y=۰ \rightarrow$$

$$۲x^{۲}\dot{y}+۴x^{۴}\ddot{y}-۶x^{۲}\dot{y}+۴\left(x^{۴}-۱\right)y=۰ \rightarrow ۴x^{۴}\ddot{y}-۴x^{۲}\dot{y}+۴\left(x^{۴}-۱\right)y=۰ \xrightarrow{\div۴}$$

$$x^{۴}\ddot{y}-x^{۲}\dot{y}+\left(x^{۴}-۱\right)y=۰ \xrightarrow{z=x^{۲}} z^{۲}\ddot{y}-z\dot{y}+\left(z^{۲}-۱\right)y=۰$$

۲.گزینه ۳

اگر در گزینه ۱ توابع را f و g بنامیم:

$$\vec{\nabla}g=(۰,۲y,-۲z)\ ,\ \vec{\nabla}f=(۲x,-۱,۰) \Rightarrow \vec{\nabla}f.\vec{F}=۲x^{۲}z-۲x^{۲}z+۰=۰$$

$$\vec{\nabla}g.\vec{F}\neq۰$$

ولی تابع f در گزینه ۳ نیز وجود دارد. اگر تابع دیگر را h بنامیم:

$$\vec{\nabla}h=(۰,۱,-۲z)$$

$\vec{\nabla}h.\vec{F}=۰+۲x^{۲}z-۲zx^{۲}=۰$ لذا گزینه ۳ صحیح است

۳.گزینه ۱

$$z=\sqrt{x} \xrightarrow{\text{مشتق}} dz=\frac{۱}{۲\sqrt{x}}dx \xrightarrow{z=\sqrt{x}} dz=\frac{dx}{۲z} \rightarrow \frac{dz}{dx}=\frac{۱}{۲z}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx}=\frac{dy}{dz}\left(\frac{۱}{۲z}\right)=\frac{\dot{y}}{۲z}$$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx}=\frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\left(\frac{۱}{۲z}\right)\right)\times\left(\frac{۱}{۲z}\right)=\left(\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}\times\frac{۱}{۲z}-\frac{dy}{dz}\times\frac{۱}{۲z^{۲}}\right)\times\left(\frac{۱}{۲z}\right)$$

$$=\frac{۱}{۴z^{۲}}\left(\frac{d^{۲}y}{dz^{۲}}\right)-\frac{۱}{۴z^{۳}}\frac{dy}{dz}=\frac{\ddot{y}}{۴z^{۲}}-\frac{\dot{y}}{۴z^{۳}}$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله دیفرانسیل داریم:

$$۴x^{۲}y''+۴xy'+(x-۴)y=۰ \rightarrow ۴\left(z^{۲}\right)^{۲}\left(\frac{\ddot{y}}{۴z^{۲}}-\frac{\dot{y}}{۴z^{۳}}\right)+۴z^{۲}\left(\frac{\dot{y}}{۲z}\right)+\left(z^{۲}-۴\right)y=۰ \rightarrow$$

۴.گزینه ۲

$$\begin{cases} 2xy' + 3xy - 1 = -4x^2 + \ln x \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

$$2xy' + 3xy - 1 = -4x^2 + \ln x \xrightarrow{(1,-1)} 2y' - 3 - 1 = -4 + 0 \rightarrow y' = 0$$

$$\xrightarrow{\frac{d}{dx}} 2y' + 2xy'' + 3y + 3xy' = -8x + \frac{1}{x}$$

$$\xrightarrow[y'=0]{(1,-1)} 0 + 2y'' - 3 - 0 = -8 + 1 \rightarrow 2y'' = -4 \rightarrow y'' = -2$$

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y'' = -2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه max نسبی است}$$

۵.گزینه ۴

$$z = \frac{x^2}{2} \xrightarrow{\text{مشتق}} dz = xdx \xrightarrow{\div dx} \frac{dz}{dx} = x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\frac{dz}{dx} = x\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dz}{dx} = \frac{d}{dz}\left(x\frac{dy}{dz}\right)(x) = \left(\frac{dx}{dz}\frac{dy}{dz} + x\frac{d^2y}{dz^2}\right)(x) = \left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz} + x\frac{d^2y}{dz^2}\right)(x) = x^2\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz}$$

با جایگذاری روابط فوق:

$$xy'' + \left(x^2 - 1\right)y' + x^3y = 0 \rightarrow x\left(x^2\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz}\right) + \left(x^2 - 1\right)\left(x\frac{dy}{dz}\right) + x^3y = 0 \rightarrow$$

$$x^3\frac{d^2y}{dz^2} + \cancel{x\frac{dy}{dz}} + x^3\frac{dy}{dz} - \cancel{x\frac{dy}{dz}} + x^3y = 0 \rightarrow x^3\left(\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + y\right) = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz} + y = 0$$

۶.گزینه ۱

$$x = \tan t \rightarrow dx = \left(1 + \tan^2 t\right)dt \rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{1 + \tan^2 t} = \cos^2 t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\left(\frac{dt}{dx}\right) = \frac{dy}{dt}\cos^2 t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\cos^2 t\right)\cos^2 t = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\cos^2 t - 2\cos t\sin t\frac{dy}{dt}\right)\cos^2 t$$

با اعمال تغییر متغیر در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\left(1 + x^2\right)^2 y'' + (1 + 2x)\left(1 + x^2\right)y' + y = 0 \rightarrow$$

$$\left(1 + \tan^2 t\right)^2\left(\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cos^2 t - 2\cos t\sin t\frac{dy}{dt}\right)\cos^2 t\right) + (1 + 2\tan t)\left(1 + \tan^2 t\right)\left(\frac{dy}{dt}\cos^2 t\right) + y = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{\cos^4 t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}\cos^4 t - 2\cos^3 t\sin t\frac{dy}{dt}\right) + (1 + 2\tan t)\frac{dy}{dt} + y = 0 \rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - 2\tan t\frac{dy}{dt} + (1 + 2\tan t)\frac{dy}{dt} + y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 0 \rightarrow y''_t + y'_t + y = 0$$

۷.گزینه ۲

$$x=t^{۲} \xrightarrow{\text{مشتق}} dx=۲t\,dt \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{dx}=\frac{۱}{۲t}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\left(\frac{۱}{۲t}\right) \quad \rightarrow \quad y'=\frac{۱}{۲t}\dot{y}$$

$$\frac{d^{۲}y}{dx^{۲}}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{dt}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\left(\frac{۱}{۲t}\right)\right)\left(\frac{۱}{۲t}\right)=\left(\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}\frac{۱}{۲t}+\frac{dy}{dt}\left(\frac{-۱}{۲t^{۲}}\right)\right)\left(\frac{۱}{۲t}\right)=\frac{۱}{۴t^{۲}}\frac{d^{۲}y}{dt^{۲}}-\frac{۱}{۴t^{۳}}\frac{dy}{dt} \quad \rightarrow$$

$$y''=\frac{۱}{۴t^{۲}}\ddot{y}-\frac{۱}{۴t^{۳}}\dot{y}$$

با جایگذاری رابطه‌های فوق در معادله دیفرانسیل:

$$۲y''+\frac{x+۱}{x}y'+y=۰ \quad \rightarrow \quad ۲\left(\frac{۱}{۴t^{۲}}\ddot{y}-\frac{۱}{۴t^{۳}}\dot{y}\right)+\frac{t^{۲}+۱}{t^{۲}}\times\left(\frac{۱}{۲t}\dot{y}\right)+y=۰ \quad \rightarrow \quad \frac{۱}{۲t^{۲}}\ddot{y}-\frac{۱}{۲t^{۳}}\dot{y}+\frac{t^{۲}+۱}{۲t^{۳}}\dot{y}+y=۰ \quad \rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲t^{۲}}\ddot{y}\times\frac{t^{۲}}{۲t^{۳}}\dot{y}+y=۰ \xrightarrow{\times ۲t^{۲}} \ddot{y}+t\dot{y}+۲t^{۲}y=۰$$

۸.گزینه ۱

$$x^{۲}y'+۲xy=y^{۲}$$

$$x^{۲}dy=\left(y^{۲}-۲xy\right)dx$$

معادله همگن می‌باشد و از تغییر متغیر $y=xu$ استفاده می‌کنیم.

$$y=xu+dy=xdu+udx$$

$$x^{۲}dyx^{۲}(xdu+udx)=\left(x^{۲}u^{۲}-۲x^{۲}u\right)dx \quad \rightarrow \quad x^{۳}du+x^{۲}udx=x^{۲}u^{۲}dx-۲x^{۲}udx$$

$$x^{۳}du=\left(x^{۲}u^{۲}-۳x^{۲}u\right)dx \quad \rightarrow \quad x^{۳}du=x^{۲}\left(u^{۲}-۳u\right)dx$$

$$xdu=\left(u^{۲}-۳u\right)dx-\int\frac{du}{u^{۲}-۳u}=\int\frac{dx}{x}$$

محاسبه انتگرال $\int\frac{du}{u^{۲}-۳u}$

$$\int\frac{۱}{u^{۲}-۳u}du=\int\frac{۱}{u(u-۳)}du=\int\frac{A}{u}du+\int\frac{B}{u-۳}du \quad , \quad A=-\frac{۱}{۳} \quad , \quad B=\frac{۱}{۳}$$

$$-\frac{۱}{۳}Lnu+\frac{۱}{۳}Ln(u-۳)=Lnx+Lnc \quad \rightarrow \quad -Lnu+Ln(u-۳)=۳\ell nx+۳Lnc$$

$$\frac{u-۳}{u}=۳xc \quad , \quad u=\frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad ۳xc=\frac{y-۳x}{y}$$

حاصل $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x}{y}$ و با قرار دادن x برابر صفر در عبارت زیر:

$$۳xc=۱-\frac{۳x}{y} \quad \rightarrow \quad ۰=۱-\frac{۳x}{y} \quad , \quad \frac{x}{y}=\frac{۱}{۳}$$

۹.گزینه ۳

$$(xy'-y)^{۲}=-x^{۲}yy''$$

$$u=y^{۲}\xrightarrow{\frac{d}{dx}}u'=۲yy'\xrightarrow{\frac{d}{dx}}u''=۲y'y'+۲yy''$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$y=\sqrt{u} \qquad y'=\frac{u'}{۲y}=\frac{u'}{۲\sqrt{u}} \qquad y''=\frac{u''-۲y'^{۲}}{۲y}$$

$$y''=\frac{u''-۲\left(\frac{u'}{۲\sqrt{u}}\right)^{۲}}{۲\sqrt{u}}$$

$$\left(x\frac{u'}{۲\sqrt{u}}-\sqrt{u}\right)^{۲}=-x^{۲}\sqrt{u}\,\frac{u''-\frac{u'^{۲}}{۲u}}{۲\sqrt{u}} \rightarrow \left(\frac{xu'-۲u}{۲\sqrt{u}}\right)^{۲}=-x^{۲}\frac{۲uu''-u'^{۲}}{۴u}$$

$$\frac{x^{۲}u'^{۲}-۴xuu'+۴u^{۲}}{۴u}=\frac{-۲x^{۲}uu''+x^{۲}u'^{۲}}{۴u}$$

$$-۴xuu'+۴u^{۲}=-۲x^{۲}uu'' \rightarrow \xrightarrow{\div u}۲x^{۲}u''-۴xu'+۴u=۰ \rightarrow x^{۲}u''-۲xu'+۲u=۰$$

۱۰.گزینه ۲

$$y'=۲y^{۲}+xy^{۲} \quad : \quad y(۰)=۱$$

$$\frac{dy}{dx}=y^{۲}(۲+x) \rightarrow \frac{۱}{y^{۲}}dy=(۲+x)dx \xrightarrow{\int}\frac{-۱}{y}=۲x+\frac{x^{۲}}{۲}+c\xrightarrow{y(۰)=۱}\frac{-۱}{۱}=۰+۰+c \rightarrow c=-۱$$

$$\frac{-۱}{y}=۲x+\frac{x^{۲}}{۲}-۱ \rightarrow y=\frac{۱}{۱-۲x-\frac{x^{۲}}{۲}}$$

$$y'=۰ \Rightarrow \frac{-\left(-۲-\frac{۲x}{۲}\right)}{\left(۱-۲x-\frac{x^{۲}}{۲}\right)^{۲}}=۰ \rightarrow ۲+x=۰ \rightarrow x=-۲ \rightarrow y=\frac{۱}{۳}$$

$$y'=۲y^{۲}+xy^{۲}\xrightarrow{\frac{d}{dx}}y''=۴yy'+y^{۲}+x(۲yy')\xrightarrow[y'=۰]{x=-۲,\,y=\frac{۱}{۳}}y''=۰+\frac{۱}{۹}+۰=\frac{۱}{۹}$$

$$\begin{cases}y'=۰\\ y''=\frac{۱}{۹}>۰\end{cases} \Rightarrow \text{Min نسبی}$$

۱۱.گزینه ۲

$$y'=\frac{x-y}{۲(x-y)+۱} \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{۲(x-y)+۱}$$

از تغییر متغیر $u=x-y$ استفاده می‌کنیم در این صورت داریم:

$$u=x-y \rightarrow du=dx-dy \rightarrow dy=dx-du$$

با جایگذاری روابط به دست آمده، در معادله دیفرانسیل داریم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{۲(x-y)+۱} \rightarrow \frac{dx-du}{dx}=\frac{u}{۲u+۱} \rightarrow ۱-\frac{du}{dx}=\frac{u}{۲u+۱} \rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{-u}{۲u+۱}+۱ \rightarrow \frac{du}{dx}=\frac{u+۱}{۲u+۱} \rightarrow$$